

复杂网络的顶点着色及其在疾病免疫中的应用*

黄斌¹⁾ 赵翔宇²⁾ 齐凯²⁾ 唐明^{2)3)†} 都永海³⁾

1) (成都信息工程学院数学学院, 成都 610225)

2) (电子科技大学互联网科学中心, 成都 610054)

3) (韩国庆北国立大学数学系, 韩国大邱 702-701)

(2013年6月19日收到; 2013年7月20日收到修改稿)

在复杂网络研究中, 对于网络结构特征的分析已经引起了人们的极大关注, 而其中的网络着色问题却没有得到足够的重视. 为了理解网络结构与着色之间的关系, 本文研究了 WS, BA 网络以及不同宏观结构参量对于正常 K 色数的影响, 发现最大团数可以大致反映正常 K 色数的变化趋势, 而网络的平均度和匹配系数比异质性和聚类系数对于色数的影响更大. 对于一些实际网络的正常着色验证了本文的分析结果. 对复杂网络的顶点进行着色后, 根据独立集内任意两个顶点均不相邻的特点, 我们提出了基于独立集的免疫策略. 与全网随机免疫相比, 基于独立集的免疫策略可令网络更为脆弱, 从而有效抑制疾病的传播. 基于网络着色的独立集提供了一种崭新的免疫思路, 作为一个简单而适用的平台, 有助于设计更为有效的免疫策略.

关键词: 复杂网络, 正常着色, 独立集, 免疫策略

PACS: 89.75.Hc, 87.19.X-, 87.23.Ge

DOI: 10.7498/aps.62.218902

1 引言

随着现代社会的发展, 网络已经深入到我们生活的方方面面, 互联网、万维网、航空网等都是与人们日常生活息息相关的复杂网络例子^[1]. 10 多年来, 复杂网络研究得到了蓬勃发展, 引起了数学、物理学、计算机科学、生命科学、社会科学等领域学者的极大兴趣^[2]. 在复杂网络研究中, 结构特征分析是一个十分重要的研究内容, 如度分布、匹配系数、聚类系数等, 是理解网络结构与功能的前提^[3]. 到目前为止, 所有相关工作可被归纳为三种不同的尺度: 基于单个节点特性的局域尺度 (通过各种统计分布表示), 基于部分群体特性的中尺度 (表现为派系和社区结构等) 以及基于全局特性的宏观尺度 (即各种宏观参量)^[4].

在网络的宏观尺度上, 平均度、异质性、聚类系数和度匹配系数等是常见的宏观参量, 各种真实

网络的这些结构特征及其在动力学行为中的重要影响被广泛关注了^[5]. 然而, 一个非常重要的宏观结构参量——网络的色数^[6], 却没有得到人们的足够重视. 在图的着色问题中, 最著名的是四色定理, 即证明平面图的顶点色数 ≤ 4 ^[7,8]. 另外, 物品的安全存储问题、无线信道的分配和日程安排问题都是顶点着色的重要应用^[6,9]. 在复杂网络的着色研究中, 对 Erdős-Rényi (ER) 随机图^[10] 的着色研究是很全面的, 历史也最悠久, 主要包括两方面的工作: 1) 求解色数上下界^[11,12] 和估计更为准确的色数^[13,14]; 2) 有效着色算法的研究^[15].

然而, 对于另外两个非常经典的网络模型, 也就是 Watts-Strogatz (WS) 小世界网络^[16] 和 Barabasi-Albert (BA) 无标度网络^[17] 的着色研究却很少; 仅限于小世界性质对顶点着色搜索算法的影响^[18], 也没有文献专门研究 BA 无标度网络模型的着色问题, 更不用说更为复杂的网络结构了. 因此, 研究 WS 小世界、BA 无标度以及其他复杂网

* 国家自然科学基金 (批准号: 11105025)、博士后科学基金特别资助 (批准号: 2012T50711)、博士后科学基金 (批准号: 20110491705)、博士点新教师基金 (批准号: 20110185120021) 和中央高校基本科研业务费项目 (批准号: ZYGX2011J056) 资助的课题; 都永海感谢韩国教育、科学与技术部支持的国家研究基金会基础科学研究项目 (批准号: NRF-2013R1A1A2010067) 的资助.

† 通讯作者. E-mail: tangminghuang521@hotmail.com

网络的着色问题是一个十分有意义的新课题,具有广泛的应用价值^[5],例如分形维数计算^[19]、疾病免疫^[20]和混沌控制^[21]等.为了理解复杂网络结构与网络着色之间的关系,我们首先研究WS、BA网络以及不同宏观结构参量对于正常 K 色数的影响;然后基于具有相同着色的独立集提出一种有效的免疫策略.

2 顶点着色的定义和算法说明

在这一节中,我们给出图(网络)顶点着色的一般定义、定理和计算算法.

正常 K 着色^[6]:给定图 $G=(V,E)$,称映射 $\pi:V\rightarrow\{1,2,\dots,K\}$ 为 G 的一个 K 点着色,简称 K 着色,称 $\{1,2,\dots,K\}$ 为色集.若对 G 中任意两个相邻顶点 u 和 v 均满足 $\pi(u)\neq\pi(v)$,则称该着色为正常的.图 G 的正常 K 着色的最小 K 值称为 G 的色数,记为 χ .若图 G 存在一个正常 K 着色,则称 G 是 K 可着色的.

最大团^[22]:团是指图中的一个完全子图,若一个团不是任何其他团的子集,则被称为极大团.一个图中含有顶点数最多的团称为该图的最大团,最大团所含的顶点数目称为最大团数,记为 W

定理1^[6] 对于完全图的色数: $\chi=N$,其中 N 表示完全图的顶点数目.

定理2^[6] 对任意的图 G 均有: $\chi\leq\Delta+1$,其中 Δ 代表图的最大度.

求解任意图的色数是个NP完全问题^[23,24].对于节点数目众多、网络结构纷繁的复杂网络,求解其色数就更加困难了.虽然图的顶点着色算法很多^[25],比如贪婪算法和启发式算法等,但要对顶点数目达到几千、几万甚至更多的网络进行着色,必须要求着色算法的时间复杂度不能太高.如果选择“回溯时序”这样的着色算法^[26],虽然理论上能够求解出图的色数,但无法在多项式时间内完成,显然无法适用于顶点数目很大的网络.因此,本文选择了最大度优先的Welsh-Powell点着色算法^[6,27],此算法的时间复杂度为 $O(N^2)$ ^[26], N 代表网络的顶点数目.具体步骤如下.

给定网络 $G=(V,E)$, V,E 代表网络的顶点和边的集合,设 $V=\{v_1,v_2,\dots,v_N\}$,着色函数为 π ,色集 $C=\{1,2,\dots,\Delta+1\}$, Δ 代表图 G 的最大度.

步骤1 $k(v_1)\geq k(v_2)\geq\dots\geq k(v_N)$;

步骤2 令 $\pi(v_i)=1,i=1$;

步骤3 若 $i=N$,则停;否则令 $C(v_{i+1})=\{\pi(v_j)|j\leq i, \text{并且 } v_j \text{ 与 } v_{i+1} \text{ 相邻}\}$,设 m 为 $C/C(v_{i+1})$ 中的最小正整数(其中 $C/C(v_{i+1})$ 的意思是集合 C 减去集合 $C(v_{i+1})$),令 $\pi(v_{i+1})=m$;

步骤4 令 $i=i+1$,转步骤3.

在以上着色算法中, $k(v_i)$ 代表顶点 v_i 的度数; C 代表色集; $\pi(v_i)=m$ 表示顶点 v_i 着 m 色.在所有顶点中,最大的颜色数值 K 被称为网络的正常 K 色数.

虽然正常 K 色数并不严格等于网络的实际色数,但可以较为准确地定出网络色数的取值上界,反映其随不同因素变化的趋势.此外,图的色数与其最大团也有密切的关系,对任意图 G 有: $W\leq\chi\leq K$.虽然计算任意图的最大团数也是一个NP完全问题,但对规模不大的稀疏网络是可以计算的^[28],可作为网络色数的下界.因此,我们可以通过正常 K 色数和最大团数 W 来确定网络实际色数的所在区间.需要指出的是,本文所涉及的拓扑结构均为无向、无权网络.

3 复杂网络的顶点着色研究

到目前为止,很多研究关注于随机图的着色问题^[11-15],却很少研究WS和BA网络的 K 着色,更不清楚影响网络色数的关键因素是什么.在这一部分中,我们首次考虑了这些问题.为了便于比较不同参数的影响大小,我们令所有网络的大小为 $N=10000$,平均度为 $\langle k\rangle=4$,计算结果均为100次不同实验的平均值.

3.1 WS和BA网络的顶点着色

在图1(a)中,相对于网络规模而言,WS网络的正常 K 色数和最大团数都很小,而它们随重连概率 p 的变化趋势存在一些差异.当 $p\in[0.0001,0.001]$ 时,非常少量的重连边并不影响 K 和 W .当 $p\in[0.001,0.01]$ 时,少量的长程连接令平均 K 色数增加较快.这与平均最短路径的变化刚好相反,从而更加紧密的局部结构可能具有更大的色数;但是,小的 p 值基本不会改变网络的最大团数 W .当 $p\in[0.01,1]$ 时,全网络的紧密性已经趋于稳定,从而重连边的增多并不影响 K 的大小.然而,较大的随机性产生了一些度较大的节点,这些节点的随机连接有利于 W 的增加.值得注意的是,这些变化的范围都比较小, W 仅从3增加到3.9, K 从4.2增加

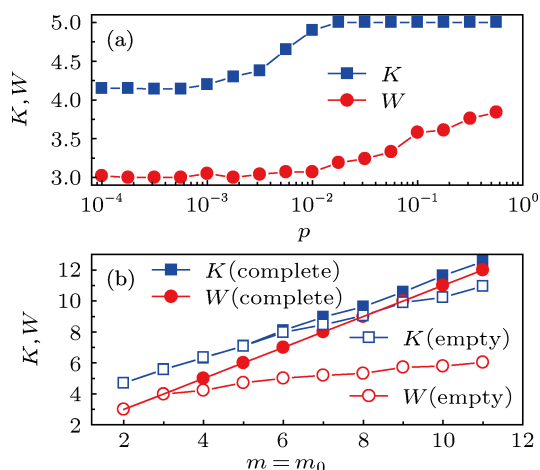


图1 WS和BA网络的着色 (a) WS网络的 K 色数和最大团数 W 随重连概率 p 的变化; (b) BA网络的 K 色数和最大团数 W 随 m 的变化, 其中方块和圆圈分别代表 K 和 W 的值(在图(b)中实心方块和圆圈表示初始为完全子图时的 K 和 W , 空心方块和圆圈分别表示初始为空图的 K 和 W , 实线表示(1)式的理论值)

到5.0, 这说明 p 对于网络色数的影响十分有限.

求解任意图的色数至今仍是没有彻底解决的难题, 目前已有的精确求解均针对特殊图. 这里我们根据BA网络的构造特点, 求解出BA网络的色数. 在建立BA网络模型时, 其算法中初始的 m_0 个节点有两种连边方式: 一是 m_0 个节点构成一个完全图; 第二种是 m_0 个节点构成没有连边的空图.

对于第一种方式, 又可分为两种不同的加边情况: $m = m_0$ 和 $m < m_0$, 其中 m 表示新加入节点所携带的新连边数.

第一种情况 $m = m_0$: 当 $t = 1$ 时, 引入一个新节点 v_{m_0+1} , 由于 v_{m_0+1} 要与所有已存在的节点相连形成一个有 $m_0 + 1$ 个节点的完全图, 而此图的色数 $\chi' = m_0 + 1$; 当 $t = 2$ 时, 设新增节点为 v_{m_0+2} , v_{m_0+2} 与已存在的 $m_0 + 1$ 个节点间连接 m 条边, 若与 v_{m_0+2} 连边的节点为 $v'_1, v'_2, \dots, v'_{m_0}$, 因色集中有 $m_0 + 1$ 种颜色: $\{1, 2, \dots, m_0 + 1\}$, 即使节点 $v'_1, v'_2, \dots, v'_{m_0}$ 选取色集中的 m_0 种颜色, 也可对 v_{m_0+2} 分配剩下的一种颜色, 此时的着色是正常的着色. 以此类推, 根据BA网络生成方式, 新增加节点 v_{m_0+t} 总能在色集 $\{1, 2, \dots, m_0 + 1\}$ 中至少找到一种颜色, 对节点 v_{m_0+t} 正常着色. 即可以用 $m_0 + 1$ 种颜色对BA网络模型进行正常着色, 则有 $\chi \leq m_0 + 1$. 又因为BA网络中含有 $m_0 + 1$ 的最大团, 故 $\chi \geq m_0 + 1$. 由此可知, $\chi = m_0 + 1$.

第二种情况 $m < m_0$: 我们可求出 $\chi = m_0$.

综上所述, 我们得到

$$\begin{aligned} \text{当 } m = m_0 \text{ 时, } \chi &= m_0 + 1; \\ \text{当 } m < m_0 \text{ 时, } \chi &= m_0. \end{aligned} \quad (1)$$

对于第二种生成方式, 初始时 m_0 个节点构成的是空图, 虽然不能精确计算出这种网络的色数, 但可以得到一个上界 $\chi \leq m + 1$. 其证明过程与上面类似, 这里不再重复.

在图1(b)中, (1)式的理论结果正好处于正常 K 色数和最大团数 W 之间, 验证了我们的分析. 对于初始完全图的情况, 网路色数与最大团数 W 严格相等, 小于正常 K 色数, 且随着平均度 $2m$ 的增大, K 和 W 呈线性增长; 对于初始空图的情况, 随着 m 的增加, K 和 W 将逐渐增大, 但增长趋势有所减缓. 由此可知, 网络连接的稠密程度是影响色数的一个极为重要的因素.

3.2 网络基本结构参量对于顶点着色的影响

上面我们分析了重连概率和平均度对于网络色数的影响. 这里我们进一步考察宏观结构参量(度分布指数、聚类系数和匹配系数)对于正常 K 色数的影响, 以期查明影响网络色数大小的关键因素.

在真实世界中, 许多无标度网络具有不同的分布指数, 例如路由器网络为 -2.18 , 蛋白质网络为 -2.4 ^[29]. 利用配置模型^[30]可生成具有不同度分布指数的无标度网络, 且网络的大小和平均度不变. 在图2(a)中, 随着分布指数的增加, 连接的异质性也将增强, 而正常 K 色数(从 $\gamma \approx -3.8$ 的 $K \approx 4.6$ 增大到 $\gamma \approx -2.0$ 的 $K \approx 7$)和最大团数 W (从 $\gamma \approx -3.8$ 的 $W \approx 3.0$ 增大到 $\gamma \approx -2.0$ 的 $W \approx 3.5$)缓慢增大, 且趋势基本一致. 这是由于异质性的增加将导致更多的大度节点连接在一起, 从而增加了网络的局部紧密性, 导致最大团数的加大. 由此, 网络异质性的增强能够增大网络的色数.

在朋友关系网络中, 你的两个朋友很可能彼此也是朋友, 这种性质称为网络的聚类特性. 为了得到不同的聚类系数, 我们选择Newman提出的一种聚类系数可变的配置网络模型^[31]. 如图2(b)所示, 在 $C \in [0.0, 0.1]$ 区域内随着聚类系数的变大, 局部连接的聚集有利于更大团的形成, 增强了局部区域的紧密性, 从而导致 W 和 K 增加较快. 在 $C \in [0.1, 0.5]$ 区域内 W 和 K 的变化较平缓, 这是因

为局域连接的聚集成团已无法获得更大的聚类系数, 只有大量的小度节点与中心节点相互组合才能形成更多三角形, 从而阻止了 W 和 K 的进一步增加. 由此, 我们可知聚类系数的增加只能在有限范围内提高网络的色数.

一个网络具有同配性的意思是网络中的大度节点倾向于与其他大度节点相连, 反之则称为网络是异配的 [32]. 对真实网络的研究发现大多数社会网络具有同配性, 而技术网络和生物趋于异配性 [32], 匹配系数是刻画网络结构特征的重要指标之一 [32,33]. 在模拟中, 先生成一个配置网络 [34], 节点数目 $N = 10000$, 度分布指数为 -3 , 最大度为 99 , 最小度为 3 , 网络模型平均度约等于 4 ; 再根据 Newman 的方法 [32] 调节网络的匹配系数, 如图 2(c), 随着匹配系数的增加, 正常 K 色数 (从 $r \approx 0$ 的 $K \approx 5.0$ 增大到 $r \approx 0.46$ 的 $K \approx 9.0$) 和最大团数 W (从 $r \approx 0.0$ 的 $W \approx 3.0$ 增大到 $r \approx 0.46$ 的 $W \approx 6.0$) 增大比较快, 趋势基本一致. 从而, 相比于度分布指数, 正匹配系数可能更有利于网络色数的提高.

根据以上分析, 我们知道网络平均度 $\langle k \rangle$ 越大, 异质性 H 越高, 聚类系数 C 越大, 匹配系数 r 越大, 网络就具有越高的色数. 为了验证这些结论, 我们计算了一些实际网络的正常 K 色数. 在表 1 中, 虽然这些网络的规模较大, 但由于连接的稀疏性, K 都比较小. 表 1 中 K 的变化趋势基本与我们的分析一致, 例如 Router 网络, 其 $\langle k \rangle, C, r$ 都很小, 因此其具有最小的 K 色数; 与 ca-HepTH 网络 (高能物理科研合作网络) 相比, Ca-GrQc 网络 (普通的科研合作网络) 的 $\langle k \rangle, H, C$ 和 r 都较大, 从而具有较大的 K ; 而对于 Wiki-Vote 网络 (维基投票网络), 虽然其

C 和 r 都小于 Ca-GrQc 网络, 但其 $\langle k \rangle$ 大了两倍左右, 故其 K 更大一些; 与 Wiki-Vote 网络相比, 更大的 H 和 C 令 Email-Enron (安然公司邮件网络) 具有更大的 K .

在所有的实际网络中除了 Router¹⁾, Email²⁾ 和 Blogsnow²⁾ (博客网络) 三个网络外, 其他所有数据均来自于斯坦福网络数据库³⁾. 如图 3 所示, 随着不同参量的增大, 真实网络 K 色数的趋势是增加的. 然而, 由于缺少一个统一的标准或指标来衡量这些因素的影响力大小, 我们很难确定谁在网络着色问题中起着更重要的作用, 这也是值得我们进一步思考的问题.

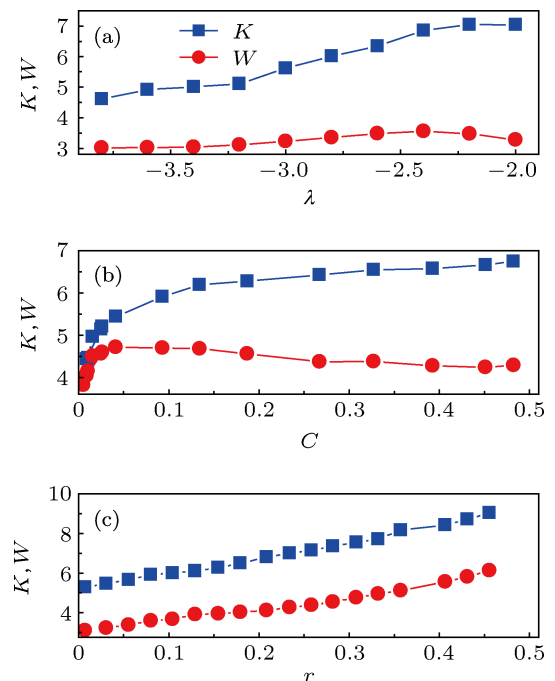


图 2 网络宏观参量对于着色的影响 (a) 度分布指数; (b) 聚类系数; (c) 匹配系数

表 1 一些真实网络的结构特征分析

网络	N	Δ	$\langle k \rangle$	H	C	r	K
Router	5022	212	4.984	5.503	0.007	-0.138	9
P2P-Gnutella-1	8846	88	7.199	2.055	0.009	0.015	11
P2P- Gnutella-2	6301	97	6.595	2.677	0.015	0.036	12
Blogsnow	3982	378	6.845	4.038	0.146	-0.133	12
P2P- Gnutella-3	8114	102	6.412	2.623	0.013	0.033	13
Email	1133	142	19.245	1.194	0.121	0.078	15
ca-HepTH	9877	130	10.524	2.382	0.471	0.268	32
Ca-GrQc	5242	162	11.057	3.051	0.530	0.659	45
Wiki-Vote	7115	1167	29.147	5.292	0.209	-0.069	50
Email-Enron	36692	2766	20.040	13.980	0.497	-0.110	54

注: 网络异质性为 $H = \langle k^2 \rangle / \langle k \rangle^2$.

1) 数据来源 <http://www.cs.washington.edu/research/networking/rocketfuel/>; 2) 数据来源 <http://www.cs.bris.ac.uk/steve/networks/peacockpaper/>; 3) 数据来源 <http://snap.stanford.edu/data>

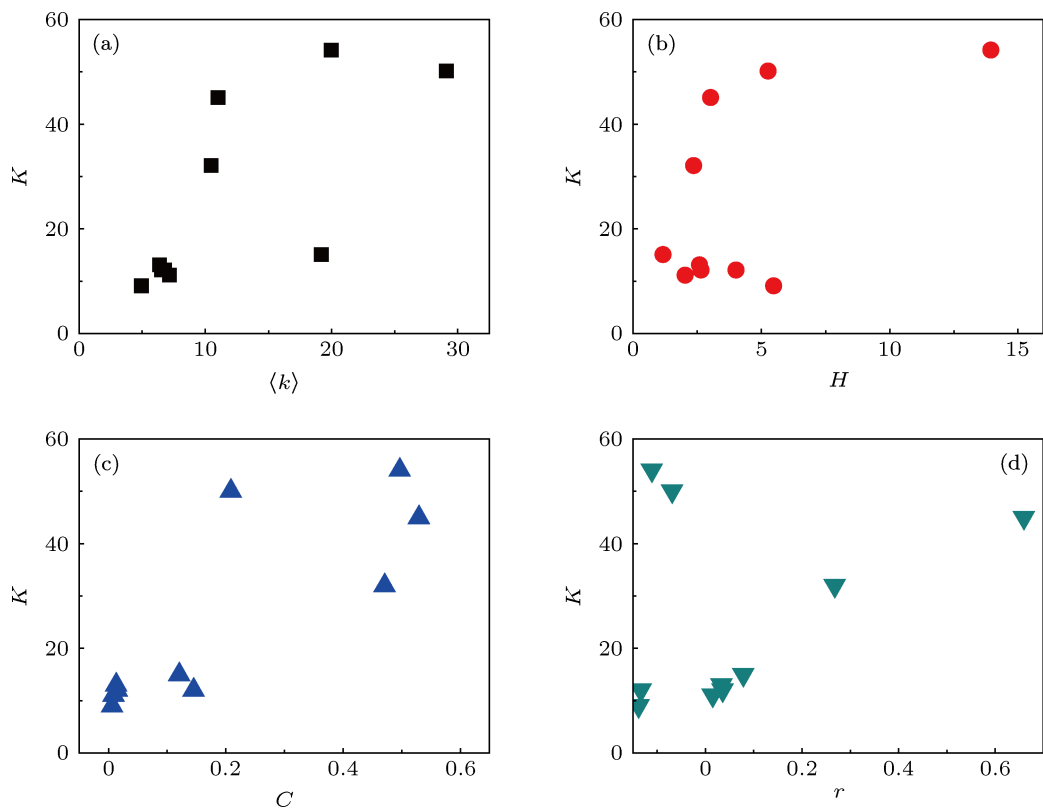


图3 真实网络中不同参量对于正常 K 色数的影响 (a) 平均度 $\langle k \rangle$; (b) 异质性 H ; (c) 聚类系数 C ; (d) 匹配系数 r

4 基于独立集的免疫策略

在复杂网络中, 各种网络结构特征能够显著影响其上的动力学行为和控制策略的选择, 例如疾病和舆情^[35-43]传播动力学. 对于无标度网络, 连接的异质性导致随机免疫策略对这类网络的失效, 从而 Pastor-Satorras 和 Vespignani 提出了目标免疫策略^[20], Cohen 等人进而提出了一种有效的局域免疫策略-熟人免疫^[44]. 虽然这些目标免疫策略^[45]具有很好的抑制效果, 但是面临着不能及时准确地识别中心节点和免疫花费过大等难题, 无法有效应用于实际疾病的防控. 在此, 我们开启一个新的免疫思路: 一旦能够对这些网络进行正常着色, 就能够得到网络的独立集, 即具有相同颜色的所有节点的集合. 考虑到独立集中任意两个节点均不相邻的特性, 我们提出了基于独立集的有效免疫策略. 作为第一步, 我们考虑一种最为简单的随机免疫策略, 也就是在一个独立集中随机免疫一定比例的节点.

为了测试免疫效果, 在免疫(移除)一定比例的节点后, 我们在剩余网络上采用经典的 SIR 病毒传播^[46,47], 其中任意一个节点都可处于 S(易感者)、I(感染者)和 R(康复者)中的一个状态. 在疾病传播的每一步中, 每一个 I 态节点都会令它所有的 S

态邻居以一定概率 β 变为 I 态节点, 与此同时这个 I 态节点也将以 δ 的概率恢复为 R 态节点, 其中 $\lambda = \beta/\delta$ 被定义为有效感染率. 初始时刻, 随机选择 10 个节点作为感染源, 其他节点均处于 S 态. 当疾病传播结束时, 即网络中不再有 I 态节点, 记录最终感染大小 F , 也就是 R 态节点占全网络的总比例. 如果 F 越小表示免疫的效果越好, 即对疾病传播的抑制作用越强. 为了更为直观地反映新策略的免疫效果, 我们比较它与全网随机免疫策略的差异.

从图 4(a) 中可以看到, 虽然都是随机地感染 10 个节点, 免疫的节点数目也相同, 但从第一大独立集(即拥有最多节点数目的独立集)中随机选择免疫节点, 明显比在整个网络中随机选择免疫节点的效果要好得多. 随着免疫比例的增大, 免疫效果更加明显. 在进行了第一大独立集中的免疫实验后, 我们又选择了其他的独立集——第二大独立集, 得到了相似的结果. 由于第二大独立集的节点数目比第一大独立集的顶点数目少, 免疫效果稍差一些, 参见图 4(b).

为什么同样是随机地选择相同数目的节点, 在独立集中的效果更好呢? 这是因为对网络的免疫过程, 等同于在网络中移除免疫的节点以及与之相关联的边; 在相同的条件下, 对独立集中的节点进行

随机免疫时,对网络的连通性的破坏更大.为了说明这一结论,我们分析了不同免疫策略对于网络脆弱性的影响.在图 5 中,我们观察了最大连通子图的相对大小 G'/N 随免疫比例 f 的变化,基于独立集的随机免疫总是具有更小的剩余网络;并且随着免疫比例的增加两个策略的效果差异越来越大.正因为独立集中的节点一定是不相邻的,能够确保所选择的节点在整个网络中更加分散,所以能够令网络更容易破碎,对传播的抑制效果也就更好.

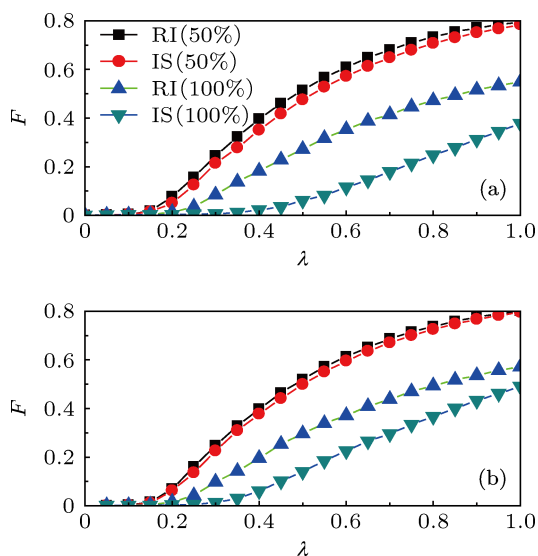


图 4 在 BA 网络中的免疫效果,最终感染大小 F 与有效感染率 λ 之间的关系(在每一子图中,IS (50%) 和 IS (100%) 分别表示在一个独立集中免疫其 50% 节点和 100% 节点的情况,RI (50%) 和 RI (100%) 表示在全网中免疫与 IS 策略相同数量节点的情况,所有计算结果为 100 次不同实验的平均值) (a) 在第一大独立集中的免疫效果比较; (b) 在第二大独立集中的免疫效果比较

此外,我们也在实际的网络数据中进行了基于独立集的随机免疫的实验.从图 6 我们可以看到,其结果与在 BA 网络中的实验是一致的.无论是在网络模型还是在实际的网络上的实验结果均表明:基于独立集的随机免疫策略均优于基于全网络的随机免疫策略.这一结果的直接应用是人们在无标度网络中无法识别中心节点或免疫中心节点成本很高时,可以使用基于独立集的免疫策略,达到较好的免疫效果.

5 结论与展望

在这一工作中,我们开始了复杂网络着色研究的第一步,为了理解网络结构与着色之间的关系,我们研究了 WS、BA 网络以及不同宏观结构参量(度分布指数、聚类系数和匹配系数)对于正常 K

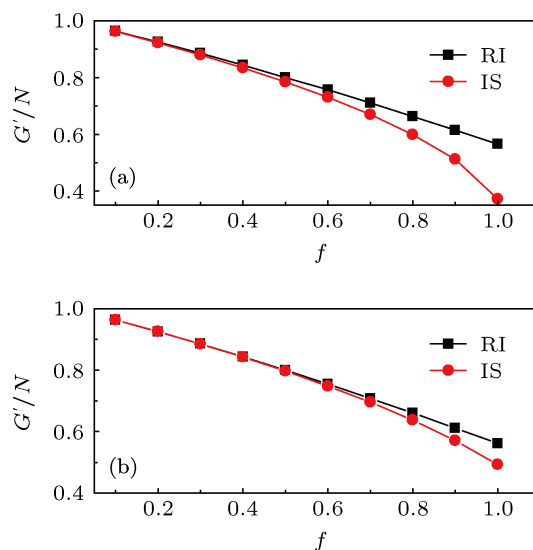


图 5 在 BA 网络中不同免疫策略对网络脆弱性的影响,最大连通子图 G'/N 随免疫比例 f (免疫节点数在一个独立集中所占的比例) 的变化关系(在每个子图中,RI 和 IS 分别表示全网随机免疫和基于独立集的随机免疫的结果,所有计算结果为 100 次不同实验的平均值) (a) 第一大独立集; (b) 第二大独立集

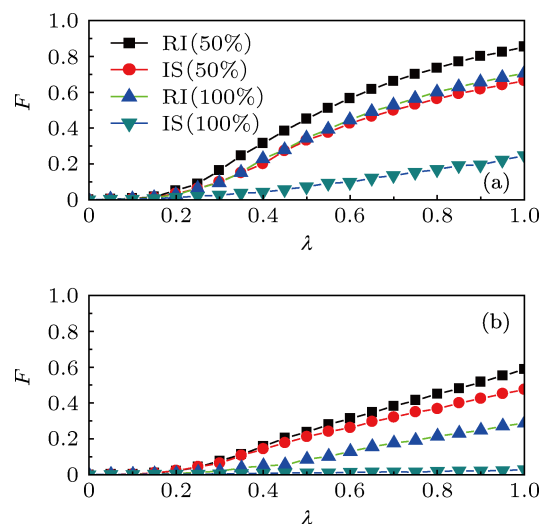


图 6 真实网络上的免疫效果(在第一大独立集中初始免疫不同比例下最终感染大小 F 与有效感染率 λ 之间的关系,所有计算结果为 100 次不同实验的平均值) (a) Blogsnow 网络; (b) Router 网络

色数的影响.我们发现在 WS 小世界网络中,重连概率仅在一定区域内影响网络的 K 色数,影响程度也极为有限;在 BA 无标度网络中,根据网络的演化机理,我们可以求解出较为准确的色数,其中网络的稠密程度,即平均度在网络着色问题中起着非常重要的作用.对于其他结构参量,网络异质性能在一定程度上影响色数,聚类系数仅在较小取值时影响色数,而匹配系数对于色数的影响更大一些.对于一些实际网络的着色实验进一步验证了我们的分析结果.通过以上的分析,我们也发现了最大

团数 W 可以大致反映正常 K 色数. 然而, 我们也看到探讨网络色数的关键影响因素仍然是一个非常困难的问题, 其他尺度上的结构特征可能对色数的影响更大, 例如社区结构和核心结构等, 这些都是潜在的研究课题.

对复杂网络的顶点进行着色后, 根据独立集内任意两个顶点均不相邻的特点, 我们提出了基于独立集的免疫策略. 与全网随机免疫相比, 基于独立

集的免疫策略明显更好, 这是因为基于独立集的目标免疫, 基于独立集的免疫策略提供了一种崭新的免疫思路: 尽可能免疫距离较远的节点能取得较好的免疫效果, 并能保证网络的删边花费很小. 在这个方向上, 独立集提供了一个简单而方便的平台, 值得进一步深入和拓展, 例如基于独立集的目标免疫和多点有效传播策略研究.

- [1] Barabasi A L 2002 *Linked: The New science of networks* (Cambridge MA: Perseus) pp1–8
- [2] He D R, Liu Z H, Wang B H 2008 *Complex Systems and Complex Networks* (Beijing: Higher Education Press) pp1–40 (in Chinese) [何大韧, 刘宗华, 汪秉宏 2008 复杂系统与复杂网络 (北京: 高等教育出版社) 第 1—40 页]
- [3] Wang X F, Chen G R 2006 *Complex Networks Theory and its Applications* (Beijing: Tsinghua University Press) pp9–14 (in Chinese) [汪小帆, 李翔, 陈关荣 2006 复杂网络理论及其应用 (北京: 清华大学出版社) 第 9—14 页]
- [4] Cui A X, Zhang Z k, Tang M, Fu Y, Hui P 2012 *PLoS ONE* **7** 50702
- [5] Dorogovtsev S N, Goltsev A V, Mendes J F F 2008 *Reviews of Modern Physics* **80** pp1275–1335
- [6] Zhang X D, Li Z L 2005 *Graph Theory and Its Applications* (Beijing: Higher Education Press) pp147–185 (in Chinese) [张先迪, 李正良 2005 图论及其应用 (北京: 高等教育出版社) 第 147—185 页]
- [7] Appel K, Haken W 1977 *Ill. J. Math* **21** 429
- [8] Appel K, Haken W, Koch J 1977 *Ill. J. Math* **21** 491
- [9] Marx D 2004 *Periodica Polytechnica Ser. El. Eng.* **48** 11
- [10] Erdos P 1959 *Canad. J. Math* **11** 34
- [11] Luczak T 1991 *Combinatorica* **11** 45
- [12] Mulet R, Pagnani A, Weigt M, Zecchina R 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 268701
- [13] Bollobás B 2001 *Random graphs* 2nd Edn. (Cambridge: Cambridge University Press) 298
- [14] Achlioptas D, Naor A, Peres Y 2005 *Nature* **435** 759
- [15] Bollobás B, Thomason A G 1985 *Annals of Discr. Math* **28** 47
- [16] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440
- [17] Barabasi A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509
- [18] Walsh T 1999 *In Proceedings of the 16th International Joint Conference on Artificial Intelligence* San Francisco pp1172
- [19] Song C M, Havlin S, Makse H A 2005 *Nature* **433** 392
- [20] Pastor-Satorras R, Vespignani A 2002 *Phys. Rev. E* **65** 036104
- [21] Wang X F, Chen G 2002 *Physica A* **310** 521
- [22] Bonze I M, Budinich M, Pardalos P M, Pelillo M 1999 *The maximum clique problem* (Netherlands: kluwer academic publishers) pp1–74
- [23] Wang S H 2009 *Graph Theory* 2nd Eds. (Beijing: Science Press) pp204–221 (in Chinese) [王树禾 2009 图论第二版 (北京: 科学出版社) 第 204—221 页]
- [24] Stephen Cook 1971 *In Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing* pp 151–158
- [25] Brelaz D 1979 *Communications of ACM* **22** 251
- [26] Klotz W 2002 *Mathematik-Bericht* **5** 1
- [27] Welsh D J A, Powell M B 1967 *The Computr. J.* **10** 85
- [28] Wang Q S, Fan T S 2010 *Computer Engineering* **36** 39 (in Chinese) [王青松, 范铁生 2010 计算机工程 **36** 39]
- [29] Boccaletti S, Latorab V, Morenod Y, Chavezf M, Hwanga D U 2006 *Physics Reports* **424** 175
- [30] Bollobás B 1980 *European Journal of Combinatorics* **1** 311
- [31] Newman M E J 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 1
- [32] Newman M E J 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 20870
- [33] Chen Y Z, Fu C H, Chang H, Li N, He D R 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3580
- [34] Holme P, Kim B J 2002 *Phys. Rev. E* **65** 026107
- [35] Tang M, Liu L, Liu Z H 2009 *Phys. Rev. E* **79** 016108
- [36] Tang M, Liu Z H, Li B W 2009 *Europhys. Lett.* **87** 18005
- [37] Ruan Z Y, Tang M, Liu Z H 2012 *Phys. Rev. E* **86** 036117
- [38] Yang H, Tang M, Zhang H F 2012 *New J. Phys.* **14** 123017
- [39] Wang L, Wang Z, Zhang Y, Li X 2013 *Sci. Rep.* **3** 1468
- [40] Zhou J, Xiao G X, Cheong S A, Fu X, Wong L, Ma S, Cheng T H 2012 *Phys. Rev. E* **85** 036107
- [41] Gong K, Tang M, Shang M S, Zhou T 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 098901 (in Chinese) [龚凯, 唐明, 尚明生, 周涛 2010 物理学报 **61** 098901]
- [42] Li R Q, Tang M, Hui P M 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 168903 (in Chinese) [李睿琪, 唐明, 许伯铭 2013 物理学报 **62** 168903]
- [43] Wang L, Yan J R, Zhang J G, Liu Z R 2007 *Chin. Phys. B* **16** 2498
- [44] Cohen R, Havlin S, Ben-Avraham D 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 247901
- [45] Zhang H F, Li K Z, Fu X C, Wang B H 2009 *Chinese Phys. Lett.* **26** 068901
- [46] Diekmann O, Heesterbeek J 2000 *Mathematical epidemiology of infectious diseases: model building, analysis and interpretation* (New York: John Wiley & Sons) pp201–207
- [47] Pei W D, Chen Z Q, Yuan Z Z 2008 *Chin. Phys. B* **17** 373

Coloring the complex networks and its application for immunization strategy*

Huang Bin¹⁾ Zhao Xiang-Yu²⁾ Qi Kai²⁾ Tang Ming^{2)3)†} Do Younghae³⁾

1) (School of Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China)

2) (Web Science Center, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China)

3) (Department of Mathematics, Kyungpook National University, Daegu 702-701, South Korea)

(Received 19 June 2013; revised manuscript received 20 July 2013)

Abstract

Structural analysis of complex networks has gained more and more concerns, but not enough attention has been paid to the coloring problem in complex networks. In order to understand the relationship between network structure and coloring problem, we investigate the effects of WS, BA networks and different macro-scale parameters on the K -proper coloring. We find that the maximum clique number can generally reflect the trend of K value change, the average degree and the degree correlation have a greater impact on the K value than the heterogeneity and the clustering coefficient. These results are verified on some real-world networks. After coloring the complex networks properly, the independent sets of networks can be obtained. According to the characteristic that any two vertices are not connected in an independent set, we propose a random immunization strategy based on the independent set. Compared with the random immunization, the proposed strategy can make the network more vulnerable, and thus effectively mitigate epidemic spreading. This immunization strategy is simple and practical, which helps to design more efficient immunization strategy.

Keywords: complex networks, proper coloring, independent set, immunization strategy

PACS: 89.75.Hc, 87.19.X-, 87.23.Ge

DOI: 10.7498/aps.62.218902

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11105025), the China Postdoctoral Science Special Foundation (Grant No. 2012T50711), the China Postdoctoral Science Foundation (Grant No. 20110491705), the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20110185120021), the Fundamental Research Funds for the Central Universities of China (Grant No. ZYGX2011J056), and Y. Do was supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education, Science and Technology (NRF-2013R1A1A2010067).

† Corresponding author. E-mail: tangminghuang521@hotmail.com